

初数部分

1. 实数公式:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

2. 乘方开方公式:

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n} (a > 0, a \neq 1)$$

$$(2) a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) (ab)^m = a^m b^m$$

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(6) a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$(7) \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0) \quad (8) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, (a \geq 0, b > 0)$$

3. 对数 ($\log_a N, a > 0, a \neq 1, N > 0$) 公式:

$$(1) \text{对数恒等式 } N = a^{\log_a N}, \text{ 更常用 } N = e^{\ln N}$$

$$(2) \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(3) \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(4) \log_a(M^n) = n \log_a M$$

$$(5) \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

$$(6) \text{换底公式: } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} (b > 0, b \neq 1)$$

$$(7) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

4. 绝对值:

$$|a| = \begin{cases} a, a > 0 \\ 0, a = 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a, a \leq 0 \\ -a, a > 0 \end{cases}; \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

5. 绝对值不等式:

$$-|a| \leq a \leq |a|; \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b; \quad ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

6. 算数平均值: $\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}$, 几何平均值: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

7. 比和比例公式:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

8. 一元二次方程的解: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

9. 根与系数的关系 (韦达定理): $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

10. 根的判别式: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta > 0 \quad \text{方程有不相等的两实根}$$

$$\Delta = 0 \quad \text{方程有两个相等实根}$$

$$\Delta < 0 \quad \text{方程无实根}$$

11. 不等式公式:

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c \quad a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$$

$$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

12. 均值不等式:

$$(1) a, b \in R \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (\text{当且仅当 } a = b \text{ 时取“=”号});$$

$$(2) a, b \in R^+ \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{当且仅当 } a = b \text{ 时取“=”号});$$

$$(3) a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc (a > 0, b > 0, c > 0);$$

$$(4) \text{柯西不等式: } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2, a, b, c, d \in R$$

$$(5) |a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

13. 含有绝对值的不等式

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 有 } |x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a.$$

14. 指数不等式与对数不等式 :

$$(1) \text{当 } a > 1 \text{ 时, } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x);$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}.$$

$$(2) \text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x);$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}.$$

$$15. \text{数列的通项公式: } a_n = \begin{cases} s_1, & n=1 \\ s_n - s_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{前 } n \text{ 项的和公式: } s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$16. \text{等差数列的通项公式: } a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d (n \in N^*)$$

17.等差数列前 n 项和公式为:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{1}{2}d)n$$

18.等比数列的通项公式: $a_n = a_1q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n (n \in \mathbb{N}^*)$

等比数列前 n 项的和公式为:

$$s_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases} \text{ 或 } s_n = \begin{cases} \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}.$$

19.某些数列的前 n 项和:

$$(1) 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$(3) 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

$$(4) 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

20.排列组合定理

加法原理: 完成一件事情有 n 种方式, 第一种方式有 m_1 种方

法, 第二种方式有 m_2 种方法, ..., 第 n 种方式有 m_n 种方法,

那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法.

乘法原理: 完成一件事情有 n 个步骤, 第一个步骤有 m_1 种方

法, 第二个步骤有 m_2 种方法, ..., 第 n 个步骤有 m_n 种方法,

那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种方法.

21.排列数公式: $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} (n, m \in \mathbb{N}^*, m \leq n).$

注:规定 $0! = 1$.

22.组合数公式:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times m} = \frac{n}{m \cdot (n-m)} \quad (n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}, m \leq n).$$

23. 组合的性质:

$$(1) C_n^m = C_n^{n-m} \quad (2) C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

24.二项式定理: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$.

25.二项展开式的通项公式: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r \quad (r=0, 1, 2, \dots, n)$.

26.展开式特征:

指数: “ a 的指数: 由 n $\xrightarrow{\text{逐渐减1}}$ 0 ; b 的指数: 由 0 $\xrightarrow{\text{逐渐加1}}$ n ; 各项 a 与 b 的指数之和为 n .”

27.展开式的最大系数:

当 n 为偶数时, 则中间项(第 $\frac{n}{2}+1$ 项)系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大;

当 n 为奇数时, 则中间两项(第 $\frac{n+1}{2}$ 和 $\frac{n+3}{2}$ 项)系数 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 最大.

28.展开式系数之间的关系:

(1) $C_n^r = C_n^{n-r}$, 即与首末等距的两项系数相等;

(2) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$, 即展开式各项系数之和为 2^n

(3) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots = 2^{n-1}$, 即奇数项系数和等于偶数项系数和.

29.等可能事件概率: $P(A) = \frac{m}{n}$.

30.互斥事件 A, B 分别发生的概率之和: $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

31.独立事件 A, B 同时发生的概率: $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$.

32. n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率:

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

33.复数的相等: $a+bi = c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$. ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

34.复数 $z = a + bi$ 的模: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a, b \in R)$.

35.复数的四则运算法则 $(a, b, c, d \in R)$:

$$(1) (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(2) (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$

$$(3) (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i;$$

$$(4) (a + bi) \div (c + di) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad (c + di \neq 0)$$

36.复平面上的两点间的距离公式:

$$d = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i).$$

平面几何与解析几何

1. 基本定义:

锐角: 小于 90 度的角叫做锐角;

钝角: 大于 90 度而小于 180 度的角叫做钝角;

直角: 90 度的角叫做直角;

平角: 180 度的角叫做平角;

周角: 360 度的角叫做周角;

余角: 如果两个角的和为 90 度, 那么这两个角称为互为余角;

补角: 如果两个角的和为 180 度, 那么这两个角称为互为补角;

三角形两边之和大于第三边, 三角形两边之差小于第三边;

三角形的三个内角之和为 180 度;

等腰三角形: 有两条边相等的三角形叫做等腰三角形;

等边三角形: 三条边都相等的三角形叫做等边三角形;

勾股定理: 如果直角三角形的两条边分别为 a, b , 斜边为 c , 那么 $a^2 + b^2 = c^2$;

平行四边形: 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形;

菱形: 四条边都相等的四边形叫做菱形;

矩形: 由一个内角是直角的平行四边形叫做矩形;

正方形: 四条边都相等, 四个角都是直角的四边形叫做正方形;

直角梯形: 有一个腰和底垂直的梯形叫做直角梯形;

等腰梯形: 两条腰相等的梯形叫做等腰梯形;

n 边形的内角和 $= (n - 2) \cdot 180^\circ$;

圆: 平面内到定点的距离等于定长的点的集合;

圆的弦: 连接圆上任意两点的线段叫做圆的弦;

垂径定理: 平分弦的直径垂直于弦, 并且平分弦所对的弧.

2. 面积和体积公式:

三角形 ABC, 三内角所对的边分别为 a, b, c , 则有

正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$;

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

面积公式:

$$(1) S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c \quad (h_a, h_b, h_c \text{ 分别表示 } a, b, c \text{ 边上的高})$$

$$(2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B.$$

平行四边形: $S = bh = ab \sin \varphi$

梯形面积: $S = \text{中位线} \times \text{高} = \frac{1}{2} (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}$

扇形面积: $S = \frac{1}{2} rl = \frac{1}{2} r^2 \theta$ 弧长: $l = r\theta$

圆柱:

侧面积: $S_{\text{侧}} = 2\pi RH$; 全面积: $S_{\text{全}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$;

体积: $V = \pi R^2 H$.

圆锥:

斜高: $l = \sqrt{R^2 + H^2}$; 侧面积: $S_{\text{侧}} = \pi Rl$; 全面积: $S_{\text{全}} = \pi Rl + \pi R^2$;

体积: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

球: 设 R —底圆半径, d —直径

全面积: $S_{\text{全}} = 4\pi R^2$; 体积: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

3. 斜率公式: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2))$

4. 直线方程:

(1) 点斜式: (过点 (x_1, y_1) 斜率为 k 的直线) $y - y_1 = k(x - x_1)$;

(2) 斜截式: (斜率为 k , 在 y 轴截距为 b 的直线) $y = kx + b$;

(3) 两点式: (过点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 的直线) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ ($y_1 \neq y_2, x_1 \neq x_2$);

(4) 截距式: (在 x, y 轴截距分别为 a, b 的直线 $ab \neq 0$) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

(5) 一般式: $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0).

5. 两条直线的平行和垂直:

(1) 若 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$

$$\textcircled{1} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2;$$

$$\textcircled{2} l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$

(2) 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 且 A_1, A_2, B_1, B_2 都不为零

$$\textcircled{1} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

$$\textcircled{2} l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

6. 夹角公式

$$(1) \tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right| \quad (l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2, k_1k_2 \neq -1)$$

$$(2) \tan \alpha = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$$

$$(l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0)$$

7. l_1 到 l_2 的角公式:

$$(1) \tan \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \quad (l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2, k_1k_2 \neq -1);$$

$$(2) \tan \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

$$(l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0).$$

8. 平面上两点间的距离公式:

设 A、B 两点的坐标为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 则此两点之间的距离为:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

9. 点到直线的距离:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{点 } P(x_0, y_0), \text{ 直线 } l: Ax + By + C = 0).$$

10. 平行线间距离:

$$\text{若 } l_1: Ax + By + C_1 = 0, \quad l_2: Ax + By + C_2 = 0 \text{ 则: } d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

11. 若 A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) , P (x, y) , P 在直线 AB 上, 且 P 分有向线段 AB

$$\text{所成的比为 } \lambda, \text{ 则 } \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}, \text{ 特别地: } \lambda = 1 \text{ 时, } P \text{ 为 AB 中点且 } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}.$$

12. 三角形的重心坐标公式:

$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 A (x_1, y_1) 、B (x_2, y_2) 、C (x_3, y_3) , 则 $\triangle ABC$ 的

$$\text{重心的坐标是: } G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

13. 点与圆心 (a, b) , 半径为 r 的圆的位置关系: 点 P (x_0, y_0) 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

的位置关系有三种若 $d = \sqrt{(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2}$, 则

$d > r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外; $d = r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上; $d < r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内.

14. 直线与圆的位置关系

$$Ax + By + C = 0 \text{ 与 } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ 的位置关系有三种: 若 } d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

则 $d > r \Leftrightarrow \Delta < 0$; $d = r \Leftrightarrow \Delta = 0$; $d < r \Leftrightarrow \Delta > 0$.

15. 两圆的位置关系: 设两圆圆心分别为 O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 , $|O_1O_2| = d$

$d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4 条公切线; $d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 三条公切线;

$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2 条公切线; $d = |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1 条公切线;

$0 < d < |r_1 - r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 无公切线.

16. 椭圆: 平面上到两定点距离之和等于定长的点的集合.

标准方程: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

其中 $\{x | -a \leq x \leq a\}$, $\{y | -b \leq y \leq b\}$, 长轴长 $= 2a$, 短轴长 $= 2b$,

焦距: $2c$ ($a^2 = b^2 + c^2$), 准线方程: $x = \pm \frac{a^2}{c}$, 离心率 $e = \frac{c}{a}$.

17. 双曲线: 平面上到两定点距离之差等于定长的点的集合.

标准方程: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$.

其中 $\{x | x \geq a \text{ 或 } x \leq -a\}$, $y \in \mathbb{R}$, 实轴长 $= 2a$, 虚轴长 $= 2b$, 焦距: $2c$

准线方程: $x = \pm \frac{a^2}{c}$, 离心率 $e = \frac{c}{a}$

18. 抛物线: 平面上到定点的距离与到定直线的距离相等的点的集合.

方程: $y^2 = 2px, (p > 0)$, 焦点: $(\frac{p}{2}, 0)$, 通径 $|AB| = 2p$, 准线: $x = -\frac{p}{2}$.

焦半径: $|CF| = x_0 + \frac{p}{2}$, 过焦点弦长: $|CD| = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2} = x_1 + x_2 + p$.

平面三角

19. 同角三角函数的基本关系式 (分式的分母全不为 0):

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

20. 两角和公式: $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=(\tan A+\tan B)/(1-\tan A\tan B)$$

$$\tan(A-B)=(\tan A-\tan B)/(1+\tan A\tan B)$$

$$\operatorname{ctg}(A+B)=(\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B-1)/(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A)$$

$$\operatorname{ctg}(A-B)=(\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+1)/(\operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} A)$$

21.倍角公式: $\tan 2A=2\tan A/(1-\tan^2 A)$

$$\operatorname{ctg} 2A=(\operatorname{ctg}^2 A-1)/2\operatorname{ctg} A$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2 \alpha-\sin^2 \alpha=2\cos^2 \alpha-1=1-2\sin^2 \alpha$$

22.半角公式: $\sin \frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}; \cos \frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}};$

$$\tan \frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}; \operatorname{ctg} \frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}.$$

23.积化和差: $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

24.和差化积: $\sin A+\sin B=2\sin \frac{A+B}{2}\cos \frac{A-B}{2}$

$$\sin A-\sin B=2\cos \frac{A+B}{2}\sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos \frac{A+B}{2}\cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$